学校编号：10384　　　　　　　　　分类号：________ 密级：________
学　　号：200323042　　　　　　　UDC: ________________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

完备随机赋范模上非零连续线性泛函的存在性

Existence of Nonzero Continuous Linear Functionals on Complete Random Normed Modules

曾　小　林

指导教师姓名：　郭　铁　信　教授

专　业　名　称：　概率论与数理统计

论文提交日期：　2006 年　5　月

论文答辩日期：　2006 年　　月

学位授予日期：　2006 年　　月

答辩委员会主席：　________

评　　阅　　人：　________

2006 年　5　月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名：　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

目　录

Contents

摘　　要

本文证明了在完备的随机赋范模上，存在一个非零连续线性泛函的充要条件是它的基底空间至少存在一个原子；存在足够多非零连续线性泛函的充要条件是它的基底空间本质上由至多可数个原子生成. 该结果表明经典的共轭空间理论对随机赋范模是普遍失效的，进一步揭示了随机共轭空间理论的基本重要性.

为了读者方便, 本文回顾了随机度量理论的产生与发展过程, 尤其是中国学者在该领域的出色工作.

关键词: 随机赋范模；连续线性泛函；几乎处处有界随机线性泛函；经典共轭空间；随机共轭空间

Abstract

This paper shows that on a complete random normed module,there exists a nonzero continuous linear functional if and only if there is at least an atom in its base space;and there exist sufficiently many nonzero continuous linear functionals if and only if its base is essentially generated by an at most countable family of atoms.The results show the theory of classical conjugate spaces is universally invalid for random normed modules, and furthermore,expose the fundamental importance of the theory of random conjugate spaces.

For the convenience of our readers,we review the emergence and development of random metric theory,in particular the excellent work of Chinese scholars in this field.

Key words: random normed modules; continuous linear functionals; a.s. bounded random linear functionals; classical conjugate spaces; random conjugate spaces

第一章 引言

随机度量理论源于概率度量空间 (Probabilistic Metric Spaces, 简记为 PM-空间) 理论. 1942 年, K. Menger 首创概率度量空间, 原名为统计度量空间 (Statistical Metric Spaces)[1], 随后他的定义被杰出的统计学家 A.Wald, 概率度量空间理论领域的著名学者 B.Schweizer 与 A.Sklar 教授以及前苏联科学院院士 A. N. Šerstnev 所发展, 并于 1964 年形成了 PM- 空间的最终定义. 在 1962 年 Šerstnev 亦提出了概率赋范空间 (Probabilistic Normed Spaces, 简记为 PN- 空间) 的概念. 在二十世纪六、七十年代 PM- 空间理论获得了蓬勃发展, 1983 年, Schweizer 与 Sklar 在该领域最有影响的著作 [2] 就是一个重要标志. 概率度量空间的基本出发点是认为两点间的距离是随机的, 从而用一个分布函数表示. 它在一个非负实数 x 处的值被解释为此两点的距离小于 x 的概率, 因此 PM- 空间理论具有强烈的应用背景. 后来, Schweizer 与 Sklar 等人将 PM- 空间的思想与信息论、聚点分析、统计力学、数理统计及混沌动力系统相结合做了一系列开创性的工作, 特别是在 PM- 空间理论发展过程中出现的 Copula , 目前在数理统计学和金融学等领域受到广泛关注 [3].

从理论上讲, PM- 空间与 PN- 空间分别是经典泛函分析中度量空间和赋范空间的概率推广. 这种分析学基础的推广必然将引发一系列基本问题的研究. 除 PM- 空间理论自身发展外, 最重要的是在 1956 年捷克布拉格学派的著名学者 A.Špaček 院士的工作 [4]: 他从随机过程理论的观点出发提出了随机度量的概念, 它可以看作一个随机过程且每一样本是某一集合上的通常度量 [5].1968 年, Stevens 修改了 Špaček 的途径, 提出了所谓的度量生成空间 [6]. 一年后, Sherwood 受 Schweizer 和 Sklar 关于分布生成空间的研究的启发提出了 E- 空间、伪度量生成空间 [7] 及 E- 范空间与半范生成空间 [8] 的概念, 并建立了引人注目的等距同构定理 [7, 8]. 直到 Schweizer 与 Sklar 的著作 [2] , 终于形成了比 Špaček 关于随机度量空间 (Random Metric Spaces, 简记为 RM- 空间) 原始定义更一般且更标准的随机度量空间及随机赋范空间 (Random Normed Spaces, 简记为 RN- 空间) 的最终定义.

1979 年, 游兆永先生在中国首先倡导了 PM- 空间理论的研究, 他和朱林户教授关于 PM- 空间等距度量化的工作 [9, 10] 直到目前仍是我国关于 PM- 空间方

面最有代表性的工作之一. 1981 年, 林熙教授在她的硕士论文中利用 Sherwood 关于 PM - 空间上依概率度量压缩映像的深刻不动点定理 [11] ，首次研究了定义在可分 Banach 空间上依概率度量压缩的随机算子的随机不动点问题, 表明利用 E- 范空间框架可以为随机算子的可测性研究提供方便 [12]. 这启发了朱林户教授 [13] 利用 E- 范空间框架研究王梓坤先生在文献 [14] 中提出的关于不可分赋范空间上随机线性泛函的延拓问题, 尤为重要的是他本质上证明了实 E- 范空间上的 Hahn-Banach 延拓定理并讨论了 E- 范空间的随机共轭空间问题. 无疑这些工作对后来的研究有极大的启发性, 但是他们工作的重心仍在 PM- 空间方面, 充其量注意到一类性质较好的 PM- 空间 ——E- 空间 [15] 的研究, 这种情况在 1989 年前后发生了质的变化.

关键的一步是郭铁信教授 1989 年的工作 [16], 郭铁信教授首先考虑了取值于任意度量空间及赋范空间的随机元集合可否构成 PM- 空间与 PN- 空间等一系列问题, 如果答案是肯定的, 那么就可以利用 PM- 空间理论全面地研究随机泛函分析. 而解决这些问题的麻烦在于所论的目标空间不可分时所带来的可测性方面的困难, 郭铁信教授完全解决了这些问题, 他利用实值随机变量集合的本质上确界原理 [17] 巧妙地构造随机度量 (随机范数) 使取值于任一度量空间 (相应地, 任一赋范空间) 的随机元构成随机度量空间 (相应地, 嵌入到随机赋范空间) ，这种构造为可测性提供了方便 [16] ，同时也保留了目标空间的完备性 [18, 19]. 特别是当所论的目标空间是可分的或所论的随机元是随机变量时, 这种构造退回到 E- 空间中相应的构造. 一般情况, E- 空间的框架不再适合. 这种构造将随机度量理论与随机泛函分析内在地融合起来, 使随机泛函分析有了一个新的发展途径 —— 空间随机化途径 [18, 20].

郭铁信教授还发现: E- 范空间的随机共轭空间不再是 E- 范空间, 而是随机赋范空间, 也注意到朱林户教授 [13] 中的技巧对实随机赋范空间亦有效, 在澄清随机线性泛函的 “线性性质” 本质的基础上在文献 [16] 中非平凡地证明了复随机赋范空间上随机线性泛函的延拓定理, 从而得到了关于随机线性泛函扩张的一个完整的 Hahn-Banach 延拓定理, 并在随机赋范空间的框架下提出了随机共轭空间的合理定义. 文献 [16] 突出了 RM- 空间及 RN- 空间的基本重要性, 它是我国最早有关随机度量理论自身研究的重要文献, 也为随机共轭空间的进一步发展作了基本的准备工作.

文献 [16] 引发了一系列关于 RN- 空间与随机内积空间 (Random Inner Product Spaces，简记为 RIP- 空间) 及其上的随机共轭空间的工作 [21-32]，其中引人注目的是文献 [23, 25, 30]，它们以不同的形式提出并研究了强 RN- 空间及强 RIP- 空间，并讨论了它们的随机共轭空间的性质. 尤其是文献 [22, 31] 利用强可测函数空间上的点式可近的思路解决了经典 Lebesgue-Bochner 函数空间中的 L^p- 逼近问题. 这些工作为随机赋范模与随机内积模等概念的提出积累了宝贵的素材.

如果将随机度量理论作为一个独立的整体深入发展的话，无疑建立它本身的深刻理论与运用它的思想解决相关领域中的困难问题是至关重要的课题，这是游兆永等人在 1991 年左右的共同愿望. 随后，郭铁信教授及其合作者的一系列论文在实现了上述愿望的同时还发现了若干过去未曾预料到的新方向. 在文献 [33] 中，郭铁信教授重新定义随机赋范空间，在此基础上引进随机赋范模 (Random Normed Modules , 简记为 RN- 模) 及随机内积模 (Random Inner Product Modules, 简记为 RIP- 模) 等概念，它们克服了强 RN- 空间及强 RIP- 空间的局限性，为随机共轭空间的深入发展铺平了道路 —— 如一类拓扑模及其模同态的发展 [19, 32, 34]，进一步证明了 Reisz- 表示定理 [35]. 特别是郭铁信教授将随机共轭空间的表示与 Banach 空间值鞅、向量测度等技巧结合，发现了一类重要的随机赋范模的随机共轭空间表示的强弱与 Banach 空间的几何结构深刻相关，不但利用 Banach 空间几何技巧完成了随机共轭空间的表示理论，而且将这些表示用于取值于共轭 Banach 空间的弱星可测函数的弱星等价性研究，获得了相当深刻的弱星等价性定理 [36].

文献 [22, 31] 建立了完备 RN- 模中依随机范数的点式最佳逼近性质与相关的 L^p- 空间中依 L^p- 范数的通常最佳逼近性质的等价关系, 这不仅解决了 Banach 空间的逼近性质的 L^p- 稳定性问题，而且利用 Banach 空间的理论解决了许多随机逼近中的存在性问题.

在文献 [37] 中, 郭铁信教授从随机赋范模与一类抽象的 L^p- 空间的联系入手建立了完备随机赋范模的随机共轭空间与相关的 Banach 空间的经典共轭空间的漂亮对应关系 (这种对应关系已成为一个不可缺少的桥梁) , 这不仅给出了完备随机赋范模为随机自反的外部特征，也进一步启发了郭铁信教授在文献 [38] 中利用随机共轭空间的表示方法统一了迄今为止六十多年来关于 Lebesgue-Bochner 函

数空间对偶表示的所有精彩结果.

在文献 [34] 中，郭铁信教授提出了随机半范空间（Random Semi-normed Spaces, 简记为 RSN- 空间) 及随机半范模 (Random Semi-normed Modules, 简记为 RSN- 模) 的定义, 对 RSN- 模上的连续模同态进行了刻画, 并证明了 RSN- 模上的 Hahn-Banach 延拓定理.

需要指出的是：在沿着泛函分析的思路尤其是空间理论的方法发展随机度量理论的过程中日益形成了随机度量理论的一个新版本，文献 [33] 是一个重要标志. 这一版本使过去关于随机共轭空间的工作获得了一个合理解释，也为随机共轭空间的进一步发展提供了一个普适的框架. 关于这一新版本及上述结论可参看郭铁信教授的综述性长文 [39, 40] 或 [41].

综上所述, 随机度量理论在中国已被发展成为一个独立、系统且统一的整体，它不仅形成了一个新版本，还提出了 RN- 模、 RIP- 模与 RSN- 模等重要框架及建立了随机共轭空间理论，特别是随机泛函分析的空间随机化途径的提出使随机泛函分析更加成熟. 随机赋范模与 Banach 空间、随机共轭空间与经典共轭空间的内在联系是随机度量理论得以深层次发展且取得成功应用的关键. 随机度量理论的发展深化了人们对经典泛函分析的认识. 今后，随机度量理论将朝着向随机分析渗透的方向发展，它有着广阔的前景. 而且因为一个随机度量空间及随机赋范空间分别决定一概率度量空间及概率赋范空间，所以我国学者关于随机度量理论的发展是对概率度量理论领域的一个最实质和独特的贡献. 应该提及，我国学者关于随机度量理论的工作引起了国际同行的重视，如见 [42] 和 [43].

随机度量理论近年的发展表明， RN- 模和随机共轭空间理论是目前该领域中最重要和最富有成果的部分 [44, 45]. 最近在文 [46] 中，经典的 James 定理被成功地推广到完备 RN- 模中，这启发郭铁信教授将经典的 Banach-Bourbaki-Kakutani-Šmulian 定理在一定条件下推广到完备 RN- 模中 [47]. 文 [47] 首次出现了涉及 RN- 模的层次结构的研究, 该文发现某些在 Banach 空间的背景下成立的经典命题，在任意的完备 RN- 模中不再成立，除非所考虑的 RN- 模拥有极其简单的层次结构，即它的基底空间本质上由至多可数个原子生成. 我们知道，赋范空间上总存在足够多的非零连续线性泛函，又由 RN- 空间中几乎处处有界随机线性泛函的保范延拓定理知， RN- 模上总存在足够多的非零几乎处处有界随机线性泛函 [39]，从某种角度看，这与赋范空间的经典情形是一致的. 然而一个

完备的 RN- 模上是否存在足够多的非零连续线性泛函呢？我们已经有反例, 如按下文注记 2.1 所构造的完备 RN- 模 S[0,1] 上不存在任何非零连续线性泛函, 这说明经典共轭空间理论对 RN- 模并非普遍有效. 本文旨在探讨完备的 RN- 模上存在一个非零连续线性泛函或存在足够多的非零连续线性泛函的特征, 这个问题的困难在于 RN- 模上的通常的连续线性泛函不易处理, 但文 [40] 中的对偶表示定理建立了通常的连续线性泛函与几乎处处有界随机线性泛函之间的深刻联系, 为解决上述问题提供了思路. 依此思路, 利用 RN- 模的良好性质, 本文证明了在完备的随机赋范模上, 存在一个非零连续线性泛函的充要条件是它的基底空间至少存在一个原子; 存在足够多非零连续线性泛函的充要条件是它的基底空间本质上由至多可数个原子生成. 该结果表明经典的共轭空间理论对随机赋范模是普遍失效的, 进一步揭示了随机共轭空间理论的基本重要性.

第二章 预备知识

为了行文及读者阅读的方便，现将本文将要用到的记号、基本概念、命题和定理简述如下：

N 表示自然数全体， K 表示实数域 R 或复数域 C ， $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为一给定的概率空间， $L(\mu,K)$ 表示 Ω 上的 K- 值 μ- 可测函数的 μ- 等价类全体形成的代数. 关于 μ- 可测函数、 μ- 可测集、 μ- 等价类等术语，均参见文献 [48]. 对 $\forall\xi\in L(\mu,K),|\xi|$ 总表示 $|\xi^0|$ 决定的 μ- 等价类，其中 ξ^0 为 ξ 的任一代表元，$|\xi^0|$ 按下式定义： $|\xi^0|(\omega)=|\xi^0(\omega)|,\forall\omega\in\Omega.$

记 $\widetilde{L}(\mu,R)$ 为 Ω 上的广义实值 μ- 可测函数的 μ- 等价类全体. 熟知，在偏序 $\le$: $\xi\le\eta$ 当且仅当 $\xi^0(\omega)\le\eta^0(\omega)$ μ-a.e. 之下， $\widetilde{L}(\mu,R)$ 成一完备格，其中 ξ^0 与 η^0 分别是 ξ 与 η 的任意选取的代表元，由 μ- 等价类的定义知上述偏序与代表元的选取无关. $(\widetilde{L}(\mu,R),\le)$ 中的任一子集 A 有最小上界 $\vee A$ 和最大下界 $\wedge A$,$L(\mu,R)$ 作为 $\widetilde{L}(\mu,R)$ 的一个子格，也是一个完备格 [48].

下文记 $\widetilde{L}^+(\mu)=\{\xi\in\widetilde{L}(\mu,R):\xi\ge 0\}$ ， $L^+(\mu)=\{\xi\in L(\mu,R):\xi\ge 0\}$.

定义 2.1[33] 有序对 $(S,\mathcal{X})$ 称为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的随机赋范空间 (简称为 RN- 空间)，如果 S 是数域 K 上的线性空间, 而且映象 $\mathcal{X}:S\to L^+(\mu)$ 满足如下三个条件 (记 $\mathcal{X}(p)$ 为 X_p)：

(RN-1) $X_{\alpha p}=|\alpha|X_p,\forall\alpha\in K,\forall p\in S$ ；

(RN-2) 若 $X_p=0$, 那么必有 $p=\theta(\theta$ 为 S 中的零元)；

(RN-3) $X_{p+q}\le X_p+X_q,\forall p,q\in S.$

进一步，若还有一映象 $*:L(\mu,K)\times S\longrightarrow S$ 使如下各条件满足：

(RNM-1) $(S,*)$ 是代数 $L(\mu,K)$ 上的左模;

(RNM-2) $X_{\xi*p}=|\xi|\cdot X_p,\forall\xi\in L(\mu,K),\forall p\in S.$

那么三元组 $(S,\mathcal{X},*)$ 被称为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的随机赋范模，简称为 RN- 模. 如文 [33] 中所述，上述模乘法 $*:L(\mu,K)\times S\longrightarrow S$ 实际上可视为通常的数乘 $\cdot:K\times S\longrightarrow S$ 的自然扩张，因此，当 $*$ 已知时，可简写 $(S,\mathcal{X},*)$ 为 $(S,\mathcal{X})$ ， $\xi*p$ 为 $\xi\cdot p$ ，即用 “$\cdot$” 既表示数乘又表示模乘法而不会产生任何混淆.

设 $(S,\mathcal{X})$ 是数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 RN- 模，对 $\forall p\in S,A\in\mathcal{A}$, 设

$p_A = \tilde{I}_A \cdot p$, 则 $p_A \in S, p_A$ 叫做 p 的 A- 层次, 其中 $\tilde{I}_A$ 为 A 的特征函数 I_A 的 μ-等价类. 显然 S 包含它里面元素的所有层次. 正如文 [47] 和下文即将表明的, 一个 RN- 模的许多性质与它的层次结构有密切的关系.

定义 2.2[33] 设 $(S, \mathcal{X})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为基的 RN- 空间. 一线性算子 $f: S \longrightarrow L(\mu, K)$ 被称为几乎处处 (简记为 a.s.) 有界的随机线性泛函, 如果存在 $\xi \in L^+(\mu)$ 使得 $|f(p)| \leq \xi \cdot X_p, \forall p \in S$. 记 S 上所有 a.s. 有界的随机线性泛函所成线性空间为 S^* , 定义 $\mathcal{X}^*: S^* \longrightarrow L^+(\mu)$ 为

$$X_f^* := X^*(f) = \wedge\{\xi \in L^+(\mu) : |f(p)| \leq \xi \cdot X_p, \forall p \in S\}, \forall f \in S^*$$

再定义 $\widetilde{*}: L(\mu, K) \times S^* \longrightarrow S^*$ 为

$$(\xi \widetilde{*} f)(p) = \xi \cdot (f(p)), \forall \xi \in L(\mu, K), f \in S^*, p \in S$$

那么 $(S^*, \mathcal{X}^*, \widetilde{*})$ 形成一个数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为基的 RN- 模, 简记为 $(S^*, \mathcal{X}^*)$, 称为 $(S, \mathcal{X})$ 的随机共轭空间.

注记 2.1[33] (a) 我们知道 $L(\mu, K)$ 是自身上的左模, 定义 $\mathcal{X}: L(\mu, K) \longrightarrow L^+(\mu)$ 为 $X_p = |p|, \forall p \in L(\mu, K)$, 则 $(L(\mu, K), \mathcal{X})$ 形成一个数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为基的 RN- 模, 仍记此 RN- 模为 $L(\mu, K)$.

(b) 设 $S[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上的 K- 值 m- 可测函数 (其中, m 表示 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度) 的 m- 等价类全体. 定义 $\mathcal{X}: S[0,1] \longrightarrow L^+(m)$ 为

$$X_p = |p|, \forall p \in S[0,1]$$

则 $(S[0,1], \mathcal{X})$ 形成一个数域 K 上的以 $([0,1], \mathcal{L} \cap [0,1], m)$ 为基的 RN- 模 (其中 $\mathcal{L}$ 表示实直线 R 上的 m- 可测集全体, $\mathcal{L} \cap [0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上的 m- 可测集全体).

命题 2.1[33] 设 $(S, \mathcal{X})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为基的 RN- 模, 那么 $f: S \longrightarrow L(\mu, K)$ 为 a.s. 有界的随机线性泛函当且仅当 f 为一连续的模同态.

命题 2.2[33] 设 $(S, \mathcal{X})$ 为数域 K 上的以 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为基的 RN- 空间, θ 为 S 中的零元. 对 $\forall \epsilon > 0, 0 < \lambda < 1$, 设

$$N_\theta(\epsilon, \lambda) = \{p \in S : \mu(\{\omega \in \Omega : X_p(\omega) < \epsilon\}) > 1 - \lambda\},$$

$$\mathcal{U}_\theta = \{N_\theta(\epsilon, \lambda) : \epsilon > 0, 0 < \lambda < 1\},$$

那么：

(1) $\mathcal{U}_\theta$ 构成 S 上的某个可度量化线性拓扑在 θ 点的局部基, 该拓扑称为 (ϵ,λ)-拓扑;

(2) S 中的序列 $\{p_n\}$ 依 (ϵ,λ)- 拓扑收敛于 S 中的元 p 当且仅当 $L^+(\mu)$ 中的序列 $\{X_{p_n-p}\}$ 依测度 μ 收敛于 0 ;

(3) 由于 $L(\mu,K)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 RN- 空间, 在其 (ϵ,λ)- 线性拓扑下 $L(\mu,K)$ 为一拓扑代数, 即代数乘法 $\cdot : L(\mu,K)\times L(\mu,K)\longrightarrow L(\mu,K)$ 为联合连续. 若 $(S,\mathcal{X})$ 为一 RN- 模, 则它为拓扑代数 $L(\mu,K)$ 上的拓扑模, 即模乘法 $\cdot : L(\mu,K)\times S\longrightarrow S$ 为联合连续.

本文中, 对任一 RN- 空间, 凡涉及其拓扑结构均指 (ϵ,λ)- 线性拓扑.

定义 2.3[48] 一个正测度集 $E\in\mathcal{A}$ 称为原子 (或 μ- 原子) , 若 $\forall F\in\mathcal{A}, F\subset E$, 必有 $\mu(F)=0$ 或 $\mu(E\backslash F)=0$. $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 可以有至多可数的一族不交原子. 称 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 是本质纯 μ- 原子的, 如果存在至多可数的一族不交原子 $\{A_n : n\in N\}$, 使得 $\Omega=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 且对每个 $A\in\mathcal{A}$, 存在 $B\in\sigma\{A_n : n\in N\}$, 使 $\mu(A\Delta B)=0$, 其中 $A\Delta B$ 表示 A 与 B 的对称差.

定义 2.4[47] 设 $(S,\mathcal{X})$ 为数域 K 上的以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 RN- 空间, $\xi=\vee\{X_p : p\in S\}$(一般地, $\xi\in\widetilde{L}^+(\mu)$) , 任取 $[\xi>0]$ 的一个代表元 $A\in\mathcal{A}$, 这样的 A 叫做 RN- 空间 $(S,\mathcal{X})$ 的一个支撑. 若 Ω 是 $(S,\mathcal{X})$ 的一个支撑, 就称 $(S,\mathcal{X})$ 具有满支撑.

本文中所讨论的 RN- 空间总假定有满支撑, 否则, 如果数域 K 上的以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 RN- 空间 $(S,\mathcal{X})$ 有支撑 A , 考虑按下式定义的概率 $\mu_A : A\cap\mathcal{A}\longrightarrow[0,1]$:

$$\mu_A(A\cap B)=\mu(A\cap B)/\mu(A),\forall B\in\mathcal{A}$$

(一般地, $\mu(A)>0$, 否则我们对 $(S,\mathcal{X})$ 不感兴趣), 并按下式定义映射 $\mathcal{X}^A : S\longrightarrow L^+(\mu_A)$:

$$X_p^A=X_p \text{ 在 } A \text{ 上的限制}, \quad \forall p\in S ,$$

那么 $(S,\mathcal{X}^A)$ 是数域 K 上以 $(A,A\cap\mathcal{A},\mu_{\mathcal{A}})$ 为基的一个 RN- 空间, 且有满支撑; 易知 $(S,\mathcal{X})$ 与 $(S,\mathcal{X}^A)$ 有相同的 (ϵ,λ)- 线性拓扑. 对我们将要研究的问题而言, 两者本质上是相同的.

命题 2.3[47] 设 $(S,\mathcal{X})$ 为数域 K 上的以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 RN- 模, $A\in\mathcal{A}$ 是 $(S,\mathcal{X})$ 的一个支撑. 那么在随机闭单位球 $S(1)=\{p\in S: X_p\leq 1\}$ 中存在一个子序列 $\{p_n: n\in N\}$, 使得 $\{X_{p_n}: n\in N\}$ 非降地收敛于 $\tilde{I}_A$. 进一步, 如果 $(S,\mathcal{X})$ 是完备的, 那么存在 $S(1)$ 中的元 g 使得 $X_g=\tilde{I}_A$.

下文中, 设 $(S,\mathcal{X})$ 为数域 K 上的以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的完备 RN- 模, $(S^*,\mathcal{X}^*)$ 是它的随机共轭空间. 设 $1\leq p\leq+\infty$, q 是 p 的共轭数, 即满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 对于 Lebesgue-Bochner 函数空间 $L^p(\mu,B)$, 请参阅文 [48]. 我们用 $|\cdot|_p$ 表示 $L^p(\mu,K)$ 上的通常 p- 范数. 记 $L^p(S)=\{g\in S:|X_g|_p<+\infty\}$, 并按下式定义 $\|\cdot\|_p: L^p(S)\longrightarrow[0,+\infty)$: $\|g\|_p=|X_g|_p,\forall g\in L^p(S)$, 那么 $(L^p(S),\|\cdot\|_p)$ 是一个 Banach 空间; 类似地理解 $(L^q(S^*),\|\cdot\|_q)$ 的含义.

Lebesgue-Bochner 函数空间的对偶表示有着悠久的历史, 正是 [38] 中的定理 3.1 抓住了 $L^p(\mu,B)$ 的所有对偶表示定理的实质, 该定理是下述定理的一个推广.

定理 2.1[40] 定义 $T: L^q(S^*)\longrightarrow(L^p(S))'$(也就是 $L^p(S)$ 的通常共轭空间) 如下: 对每个 $f\in L^q(S^*),T_f$(也就是 T(f)): $L^p(S)\longrightarrow K$ 按下式给出: $T_f(g)=\int_\Omega f(g)d\mu,\forall g\in L^p(S)$, 其中 $1\leq p<+\infty$. 那么我们有 $L^q(S^*)$ 在典型映射 T 下等距同构于 $(L^p(S))'$, 简记为 $L^q(S^*)\cong(L^p(S))'$.